MAI 2 cvičení 1 a 2 – užití derivace funkce

I. Ukažte, že platí nerovnosti:

a) $e^x \geq 1 + x \ , \ x \in R$;

b) $\log x \leq x - 1 \ , \ x \in (0, \infty)$;

c) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x \ , \ x \in (0, \infty)$;

d) $x - \dfrac{x^2}{2} < \log(x+1) < x \ , \ x \in (0, \infty)$.

II. Ukažte, že platí (a interpretujte geometricky):

Je-li $f''(x) > 0$ (resp. $f''(x) < 0$) v intervalu (a,b), pak pro lib. $x_0 \in (a,b)$ a všechna $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$ je $f(x) > f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ (resp. $f(x) < f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$).
(Odtud se pak snadno ukáže např. platnost nerovností $\log(x+1) < x$ pro $x > -1$, $x \neq 0$).

III. Užití Lagrangeovy věty o střední hodnotě funkce :

a) Ukažte, že pro všechna $x, y \in R$ platí nerovnosti

(i) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$;

(ii) $|arctg x - arctg y| \leq |x - y|$ pro všechna $x, y \in R$.

Zkuste zobecnit.

b) Spočítejte : (i) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}})$; (ii) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

c) Je-li $f'(x) = g'(x)$ ($f'(x) \in R$, $g'(x) \in R$.) pro $x \in (a,b)$, co lze říci o funkcích $f(x)$ a $g(x)$ na intervalu (a,b)?

IV. Několik příkladů na vyšetřování extrémů funkcí:

1. Na grafu funkce $y = x^2$ najděte bod, nejbližší bodu $A[6,3]$.
2. Najděte válec daného objemu s nejmenším povrchem.
3. Jaké čtverce v rozích čtvercového papíru máme vystřihnout, abychom složili krabičku (bez víka) maximálního objemu?
4. Do koule daného poloměru R vepište válec maximálního objemu (nebo s maximálním povrchem).
5. Jaký maximální objem může mít kužel, je-li dána jeho strana?
6. Do daného kuželu vepište válec (tak, že základna válce je část základny kuželu) maximálního objemu.
7. V rovině je dán bod $A[a,b]$, $a > 0$, $b > 0$. Kdy bude mít pravoúhlý trojúhelník OPQ (O je počátek s.s., P leží na ose x, Q leží na ose y a bod A je bodem přepony PQ) nejmenší obsah?
8. Z chodby o šířce a kolmo odbočuje chodba o šířce b. S jak dlouhou tyčí (zanedbatelného průřezu, nesenou vodorovně) je možné zatočit z chodby o šířce a do chodby o šířce b ?
9. Najděte, kde se má postavit most (kolmo) přes řeku tak, aby cesta mezi dvěma místy, která jsou řekou oddělena, byla nejkratší.
10. Kapka s počáteční hmotností m_0 padá volným pádem (z dostatečné výšky) a přitom se vypařuje – hmotnost kapky v čase t je dána vztahem $m(t) = m_0 - kt$, $k > 0$. Kdy bude mít kapka největší kinetickou energii?

11. Ukažte, že při průchodu paprsku světla z prostředí I (s rychlostí šíření světla v_1) do prostředí II (s rychlostí šíření světla v_2) projde paprsek rozhraním mezi I a II v bodě P, kde platí

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

kde α_1, resp. α_2, je úhel, který svírá paprsek v prostředí I, resp. v II, s kolmicí v bodě P rozhraní (rovina lomu splývá s rovinou dopadu).

V. Taylorův polynom.

a) Najděte Taylorův polynom stupně n ($n \geq 3$) v bodě $a = 0$ pro funkce $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$, $\log(x+1)$, $\sqrt{1+x}$;

b) Najděte Taylorův polynom stupně $n = 3$ v bodě $a = 0$ pro funkci $arctg\, x$;

c) Najděte Taylorův polynom druhého stupně v bodě $a = 0$ pro funkce $f(x) = \ln(1 + \sin 2x)$ a $f(x) = \sqrt{1 + 3e^{-x}}$.

d) Užitím Taylorova polynomu spočítejte limity :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \; ; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \exp(-\frac{x^2}{2})}{x^4} \; ; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3} \; ;$$

$$\lim_{x\to\infty} (x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})) .$$

e) Odhadněte chybu v následujících aproximacích:

(i) $\exp(x) \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}$ pro $0 \leq x \leq 1$;

(ii) $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ pro $|x| \leq \frac{1}{2}$.

f) a) S pomocí Taylorova polynomu spočítejte přibližně (a pokuste se odhadnout chybu): $\sqrt{0{,}98}$; $arctg(0{,}8)$ apod. ;

b) Je-li $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$, spočítejte přibližně $f(1{,}03)$, $f(1{,}001)$.